

*Total number of printed pages-36*

**3 (Sem-1/CBCS) MAT HG/RC**

**2022**

**MATHEMATICS**

(Honours Generic/Regular)

***For Honours Generic***

***Attempt either*** MAT-HG-1016 ***or*** MAT-HG-1026

***For Regular***

***Attempt*** MAT-RC-1016

***The figures in the margin indicate  
full marks for the questions.***

***Answer either in English or in Assamese.***

**OPTION-A**

Paper : MAT-HG-1016/MAT-RC-1016

**(Calculus)**

*Full Marks : 80*

*Time : Three hours*

*Contd.*

1. Answer **any ten** questions :  $1 \times 10 = 10$   
যিকোনো দহটা প্রশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the value of  $\sin 1680^\circ$ .

$\sin 1680^\circ$  ৰ মান উলিওঁৱা।

(b) Write the range of the function

$$f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^2 + 4}$$

$f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^2 + 4}$  ফলনটোৰ পৰিসৰ লিখা।

(c) Write the equation which shifted the graph of the equation  $x^2 + y^2 = 49$  into 3 units down and 2 units left.

$x^2 + y^2 = 49$  সমীকৰণৰ লেখটোক 3 একক ওললৈ আৰু 2 একক বাওঁফালে স্থানান্তৰ কৰা সমীকৰণটো উলিওঁৱা।

(d) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) :  $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x)$

(e) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) :  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$

(f) Is  $f(x) = \sin x$  one-one on the interval  $[0, \pi]$ ?

$f(x) = \sin x$  ফলনটো  $[0, \pi]$  অন্তর্ভুক্ত এঁকৈকি হয়নে?

(g) Is the function  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  continuous over its domain  $[-2, 2]$ ?

$[-2, 2]$  আদিক্ষেত্রত ফলন  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  অবিচ্ছিন্ন হয়নে?

(h) What is the  $n$ th derivative of  $e^{ax}$ ?

$e^{ax}$  ৰ  $n$ তম অবকলজটো কি হ'ব?

(i) State whether the statement is true or false:

The function  $y = |x|$  is differentiable in  $(-\infty, 0)$  and  $(0, \infty)$ .

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা : ফলন  $y = |x|$ ,  $(-\infty, 0)$  আৰু  $(0, \infty)$  অন্তর্ভুক্ত অৱকলন।

(j) Write the Maclaurin series for  $e^x$ .

$e^x$  ৰ মেক্লেৰিন শ্ৰেণীটো লিখা।

(k) If  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ , then find the value of

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$$

যদি  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$  তেন্তে

$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(l) Find the value of  $\sin \left( \arcsin \frac{\pi}{6} \right)$ .

$\sin \left( \arcsin \frac{\pi}{6} \right)$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(m) State whether the statement is true or false :

The function  $f(x) = \cos x$  is increasing in the interval  $[0, \pi]$ .

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা :

ফলন  $f(x) = \cos x$ ,  $[0, \pi]$  অন্তৰালত বৰ্ধমান হ'ব।

(n) State the Leibnitz theorem.

লীবনিট্জৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(o) Find the average rate of change of  $y = x^2 + 1$  w. r. t.  $x$  over the interval  $[3, 5]$ .

$x$  সাপেক্ষে  $[3, 5]$  অন্তৰালত  $y = x^2 + 1$  ৰ গড় হাৰ মান উলিওঁৱা।

(p) Sketch the graph of  $y = |x|$  shifted 2 units to the right and 1 unit down.

2 একক সোঁফালে আৰু 1 একক তললৈ স্থানান্তৰ কৰা,  $y = |x|$  ফলনটোৰ লেখ অংকন কৰা।

(q) State whether the statement is true or false :

An equation of a curve of degree  $n$  has at most  $n$  asymptotes.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা :

এটা  $n$  ঘাতৰ বক্ৰৰ সমীকৰণৰ সৰ্বাধিক  $n$  অনন্তস্পৰ্শী আছে।

(r) State whether the statement is true or false :

The slope of the tangent line to the curve  $y = x^2 + 4x + 7$  at  $x = 1$  is 6.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা :

$x = 1$  বিন্দুত  $y = x^2 + 4x + 7$  বক্ৰৰ স্পৰ্শকৰ  
প্রৱণতা 6।

2. Answer **any five** questions :  $2 \times 5 = 10$

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$$

(b) Show that  $f(x) = \frac{x^3}{4}$  and  $g(x) = (4x)^{\frac{1}{3}}$   
are inverses of one another.

দেখুওঁৱা যে  $f(x) = \frac{x^3}{4}$  আৰু  $g(x) = (4x)^{\frac{1}{3}}$  এটা  
আনটোৰ বিপৰীত।

- (c) Sketch the graph of the function  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  and find its domain and range.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$  ফলনটোৰ লেখ আঁকা আৰু ইয়াৰ আদিক্ষেত্র আৰু পৰিসৰ উলিওঁৱা।

- (d) If  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$ , then find  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .

যদি  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$  তেন্তে  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) If (যদি)  $f = x^2 + y^2 + z^2$ , then prove that (তেন্তে প্রমাণ কৰা যে)

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 2f.$$

- (f) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

(g) Find the derivative of  $\tan x$  w.r.t.  $\sin x$ .

$\sin x$  সাপেক্ষে  $\tan x$  ৰ অবকলজ উলিওৱা।

(h) If the function  $f(x) = \begin{cases} 5x-1, & x \leq 1 \\ kx^3, & x > 1 \end{cases}$  is continuous everywhere, then find the value of  $k$ .

$$\text{যদি } f(x) = \begin{cases} 5x-1, & x \leq 1 \\ kx^3, & x > 1 \end{cases}$$

ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন হয়,  $k$  ৰ মান নির্ণয় কৰা।

(i) If  $y = e^{a \sin^{-1} x}$ , prove that

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0.$$

যদি  $y = e^{a \sin^{-1} x}$ , তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$$

(j) Show that  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  does not exist.

দেখুওৱা যে,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  স্থিত নহয়।



3. Answer **any four** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find  $\frac{dy}{dx}$  if  $y^2 = x^2 + \sin xy$

$\frac{dy}{dx}$  উলিওৱা যদি  $y^2 = x^2 + \sin xy$

(b) Show that the point (2, 4) lies on the curve  $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ . Also find the tangent and normal to the curve at (2, 4). 1+(2+2)=5

দেখুওৱা যে (2, 4) বিন্দুটো  $x^3 + y^3 - 9xy = 0$  বক্ৰৰ ওপৰত আছে। আকৌ (2, 4) বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(c) Show that the area of the triangle ABC is  $\frac{1}{2} bc \sin A$ .

দেখুওৱা যে ABC ত্ৰিভুজৰ কালি  $\frac{1}{2} bc \sin A$

(d) Evaluate using L'Hospital's rule :

এল' হ'চপিতাল নীতি প্ৰয়োগ কৰি মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

- (e) Find the maximum and minimum value of the function.  $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 5$

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 6$$

ফলন  $y = x^3 - 2x^2 + x + 6$  ৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা।

- (f) Apply  $\varepsilon - \delta$  definition to show that the following function is continuous at  $x = 0$  :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$\varepsilon - \delta$  সূত্র প্রয়োগ কৰি দেখুওৱা যে তলৰ ফলনটো  $x = 0$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

- (g) If (যদি)  $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $|x| < 1$ , show that

(দেখুওৱা যে)

(i)  $(1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$

(ii)  $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n = 0$

$3+2=5$

(h) Using definition find  $\frac{\partial u}{\partial x}$  at (1,1) if

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

সূত্র প্রয়োগ কৰি (1,1) বিন্দুত  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ৰ মান উলিওৱা

য'ত  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4. Answer **any four** questions : 10×4=40  
যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) (i) State and prove Rolle's theorem. 5

ৰ'লৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

(ii) If  $u$  is a homogeneous function of  $x$  and  $y$  of degree  $n$ , show that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

5

$u$  এটা  $n$ -ঘাতৰ  $x$  আৰু  $y$  ৰ সুষম ফলন হ'লে, দেখুওৱা যে

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

(b) If  $z = \log \tan \left( \frac{y}{x} \right)$ , then verify

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

যদি  $z = \log \tan \left( \frac{y}{x} \right)$ , তেন্তে সত্যতা প্রমাণ কৰা

যে 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

(c) (i) If  $u = x \sin^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) + y \tan^{-1} \left( \frac{x}{y} \right)$ ,

find the value of

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \text{ at } (1,1) \quad 5$$

যদি  $u = x \sin^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) + y \tan^{-1} \left( \frac{x}{y} \right)$ ,

তেন্তে  $(1,1)$  বিন্দুত  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$  ৰ

মান নির্ণয় কৰা।

(ii) If

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

show that  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$  5

$$\text{যদি } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

তেন্তে দেখুওৱা যে,  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$

(d) (i) State Euler's theorem on homogeneous function and verify

it for the function  $u = \frac{x(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3}$

5

সুষম ফলনৰ ইউলাৰৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখা আৰু ইয়াৰ সত্যতা  $u$  ফলনৰ বাবে পৰীক্ষা কৰা

$$\text{য'ত } u = \frac{x(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3}$$

(ii) If  $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(\theta h)$ ,  
 $0 < \theta < 1$ , find  $\theta$  when  $h=7$  and  
 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . 5

যদি  $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(\theta h)$   
 $0 < \theta < 1$ , তেন্তে  $\theta$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত  
 $h=7$  আৰু  $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(e) Using Maclaurin's theorem, expand  $\cos x$  in ascending powers of  $x$ .  
 মেক্‌লৰিনৰ উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি  $\cos x$  ক উৰ্ধগামী  $x$  ৰ ঘাতত প্ৰসাৰ কৰা।

(f) (i) State Lagrange's mean value theorem and verify it for the function  $f(x) = \log x$  in  $[1, e]$   
2+3=5

লেগৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ উক্তিটো লিখা  
 আৰু ইয়াৰ সত্যতা ফলন  $f(x) = \log x$  ৰ বাবে  
 $[1, e]$  অন্তৰালত প্ৰমাণ কৰা।

(ii) Evaluate (মান নির্ণয় করা) :  $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 5$

(i) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \tan x}{\log x}$$

(ii) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \log(1+x)}{x \sin x}$$

(g) If  $y = \cos(m \sin^{-1} x)$ , prove that

$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\} \{(n-4)^2 - m^2\} \dots (4^2 - m^2)(2^2 - m^2)(-m^2)$$

যদি  $y = \cos(m \sin^{-1} x)$ , তেত্তে প্রমাণ করা যে,

$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\} \{(n-4)^2 - m^2\} \dots (4^2 - m^2)(2^2 - m^2)(-m^2)$$

(h) (i) Let  $f(x) = (x-a) \cos\left(\frac{1}{x-a}\right)$  for

$x \neq a$  and let  $f(a) = 0$ . Show that  $f$  is continuous at  $x = a$  but not derivable at that. 5

ধরা হ'ল  $f(x) = (x-a) \cos\left(\frac{1}{x-a}\right)$ ,

$x \neq a$  আৰু ধরা হ'ল  $f(a) = 0$ । দেখুওৱা যে  $f$  ফলন  $x = a$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন, কিন্তু অৱকলন নহয়।

$$(ii) \text{ Let } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \cos x, & \text{if } x \neq 0 \\ 2 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Show that  $f(x)$  is continuous at  $x = 0$ . 5

ধৰা হ'ল  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \cos x, & \text{if } x \neq 0 \\ 2 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

দেখুওৱা যে  $f(x)$  ফলন  $x = 0$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(i) (i) If  $u = \tan^{-1} \left( \frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$ , prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u. \text{ Hence}$$

deduce that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2 \cos 2u - 1) \sin 2u$$

$$5+2=7$$

যদি  $u = \tan^{-1} \left( \frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$ , তেন্তে প্রমাণ

কৰা যে  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ । ইয়াৰ

পৰা সাব্যস্ত কৰা যে

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2 \cos 2u - 1) \sin 2u$$



(ii) If  $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

3

যদি  $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , দেখুওরা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(j) (i) Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

is continuous at  $(0,0)$

5

দেখুওরা যে ফলন

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(ii) Using Lagrange's mean value theorem in  $[a, b]$ . Prove that

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2} \text{ for}$$

positive values of  $a, b$ . 5

লেগবাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যটো প্রয়োগ কৰি  
 $[a, b]$  অন্তৰালত, প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2},$$

$a, b$  ধনাত্মক মানৰ বাবে।

**OPTION-B**

Paper : MAT-HG-1026

(Honours Generic)

**(Analytical Geometry)**

Full Marks : 80

Time : Three hours

**The figures in the margin indicate full marks for the questions.**

1. Answer **any ten** questions :  $1 \times 10 = 10$

যিকোনো দহটা প্রশ্নৰ উত্তৰ :

- (i) What is the locus represented by the equation  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  ?

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  সমীকৰণটোৰে কি সঞ্চাৰপথ সূচায়?

- (ii) If the lines  $y = mx$  and  $y = m'x$  are conjugate diameters of the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , then write down the value of  $mm'$ .

যদি  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  উপবৃত্তৰ  $y = mx$  আৰু

$y = m'x$  দুভাগ সংযুক্ত ব্যাস হয়, তেন্তে  $mm'$  ৰ মান লিখা।

- (iii) Write down the parametric form of the equation of the circle  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$x^2 + y^2 = a^2$  বৃত্তৰ সমীকৰণটোক প্ৰাচলিক ধৰণত লিখা।

- (iv) What is the general equation of a plane parallel to  $x$ -axis?

$x$ -অক্ষৰ সমান্তৰাল হোৱা সাধাৰণ সমতলৰ সমীকৰণ কি?

- (v) Write down the centre and radius of the sphere given by the equation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

সমীকৰণৰ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসার্ধ লিখা।

(vi) Write the condition, if

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  represents a pair of perpendicular lines.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  ই, এযোৰ পৰস্পৰ লম্বভাৱে থকা সৰল ৰেখা নিৰূপণ কৰাৰ চৰ্ত উল্লেখ কৰা।

(vii) Write the condition that the general equation of the second degree

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

may represent a pair of straight lines ?

দ্বিতীয় ঘাতৰ সাধাৰণ সমীকৰণ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

যে যোৰ সৰলৰেখা বুজোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

(viii) Define a conic.

শংকু এটাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(ix) Write the equation of the normal to the parabola  $y^2 = 4ax$  at  $(am^2, -2am)$ .

$y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তৰ  $(am^2, -2am)$  বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণটো লিখা।

(x) For what values of  $a$ , the transformation  $x = x' + 2$ ,  $y = ay' - 3$  is a translation?

$a$  ৰ কি মানৰ বাবে  $x = x' + 2$ ,  $y = ay' - 3$  ৰূপান্তৰটো এটা স্থানান্তৰ?

(xi) Define conjugate diameters of an ellipse.

উপবৃত্ত এটাৰ সংযুক্ত ব্যাসৰ সংজ্ঞা লিখা।

(xii) Find parametric equations of the line passing through  $(4, 2)$  and parallel to  $\vec{v} = (-1, 5)$ .

$(4, 2)$  বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা  $\vec{v} = (-1, 5)$  ৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ প্ৰাচলিক সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(xiii) Find the distance between the points  $(1, -2, 0)$  and  $(4, 0, 5)$ .

$(1, -2, 0)$  আৰু  $(4, 0, 5)$  বিন্দু দুটিৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

(xiv) If  $\vec{u} = i - 3j + 2k$  and  $\vec{v} = i + j$ , find the magnitude of  $\vec{u} + \vec{v}$ .

যদি  $\vec{u} = i - 3j + 2k$  আৰু  $\vec{v} = i + j$ , তেন্তে  $\vec{u} + \vec{v}$  ৰ মাপাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(xv) Define dot product of *two* vectors.

দুটা ভেক্টৰ অদিশ পূৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(xvi) Find the unit vector that has the same direction as  $\vec{u} = i - 2j + 2k$ .

$\vec{u} = i - 2j + 2k$  ৰ দিশত একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(xvii) What is the value of  $i \cdot (i \times j)$  ?

$i \cdot (i \times j)$  ৰ মান কি?

(xviii) Find the point on the conic

$\frac{8}{r} = 3 - \sqrt{2} \cos \theta$  whose radius vector is 4.

$\frac{8}{r} = 3 - \sqrt{2} \cos \theta$  শাংকৰৰ ওপৰত থকা বিন্দু এটা নিৰ্ণয় কৰা য'ত ব্যাসার্ধ ভেক্টৰ 4।

2. Answer **any five** questions :  $2 \times 5 = 10$

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the equation of the line  $3x + 4y - 10 = 0$  when the origin is transferred to the point (2,1).

মূলবিন্দুক (2,1) বিন্দুলৈ স্থানান্তৰ কৰিলে

$3x + 4y - 10 = 0$  সমীকৰণটোৰ কি ৰূপান্তৰ হ'ব

যদিহে অক্ষদ্বয়ক কোনো দিশতে ঘূৰোৱা নহয়।

(b) If the two pair of lines

$$x^2 - 2pxy - y^2 = 0 \text{ and}$$

$x^2 - 2qxy - y^2 = 0$  be such that each pair bisects the angle between the other pair, prove that  $pq + 1 = 0$ .

যদি  $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$  আৰু

$$x^2 - 2qxy - y^2 = 0 \text{ সৰলৰেখা দুযোৰৰ}$$

প্রতিযোৰেই আনযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক হয়, প্রমাণ কৰা যে  $pq + 1 = 0$

(c) Find the angle between the vector

$$\vec{u} = 3i - 4j + 12k \text{ and } \vec{v} = -4i - 3k.$$

$\vec{u} = 3i - 4j + 12k$  আৰু  $\vec{v} = -4i - 3k$  ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰা।

(d) Find the vertex and focus of the

$$\text{parabola } 4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0.$$

$4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0$  অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দু আৰু নাভি উলিওৱা।



(e) Find the centre of the ellipse  
 $2x^2 + 3y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$

$2x^2 + 3y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$  উপবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ  
নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Define pole and polar of a conic.

এটা শাংকৰৰ ধ্ৰুৱবিন্দু আৰু ধ্ৰুৱীয়ৰেখাৰ সংজ্ঞা লিখা।

(g) Prove that the equation

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$$

represents *two* lines and find their  
point of intersection.

প্ৰমাণ কৰা যে,  $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$   
ই এযোৰ সৰলৰেখা নিৰূপণ কৰে আৰু ইহঁতৰ ছেদবিন্দুৰ  
স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(h) Find the angle between the lines  
represented by the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে নিৰূপণ কৰা সৰলৰেখা দুভালৰ মাজৰ কোণ  
নিৰ্ণয় কৰা।

- (i) Find the joint equation of the straight lines which bisect the angles between the *two* lines given by

$$3x^2 + 6xy - y^2 = 0.$$

$3x^2 + 6xy - y^2 = 0$  ৰেখাদ্বয়ৰ মধ্যৰ্তী কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুভালৰ যৌথ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (j) Find the direction cosines of the vector  $\vec{u} = 2i + 3j + 4k$ .

$\vec{u} = 2i + 3j + 4k$  ভেক্টৰৰ দিশাংক নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer **any four** questions :  $5 \times 4 = 20$

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Transform the equation

$x^2 + 2xy \tan 2\alpha - y^2 = a^2 \sec 2\alpha$  to rectangular axes inclined at angle  $\alpha$  to the old rectangular axes.

$$x^2 + 2xy \tan 2\alpha - y^2 = a^2 \sec 2\alpha$$

সমীকৰণটোক নতুন কাৰ্টেচীয় অক্ষসাপেক্ষে ৰূপান্তৰ কৰা য'ত নতুন অক্ষদ্বয়ে পুৰণা অক্ষদ্বয়ৰ লাগত  $\alpha$  কোণ কৰে।

- (b) Find the equation of the pair of tangents from a given point  $(x_1, y_1)$  to the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

এটা নির্দিষ্ট বিন্দু  $(x_1, y_1)$  ৰ পৰা  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তলৈ টনা স্পর্শকযোৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) Show that the product of the perpendiculars from any point  $(x_1, y_1)$  on the lines given by

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \text{ is}$$

$$\frac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

দেখুওৱা যে  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখা দুভালৰ ওপৰত যিকোনো বিন্দু  $(x_1, y_1)$  ৰ পৰা টনা লম্ব দুভালৰ পূৰণ ফল

$$\frac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

- (d) Find the equation of the tangent at  $(x_1, y_1)$  on the conic

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকৰৰ  $(x_1, y_1)$  বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) Find the centre of the conic

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Hence show that parabola is a non-central conic.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকৰৰ কেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে, অধিবৃত্ত এটা অকেন্দ্ৰিয় শাংকৰ।

- (f) Find a vector that is orthogonal to both of the vectors  $\vec{u} = 2i - j + 3k$  and  $\vec{v} = -7i + 2j - k$ .

$\vec{u} = 2i - j + 3k$  আৰু  $\vec{v} = -7i + 2j - k$  ভেক্টৰ দুটিৰ উভয়ৰে লম্ব হোৱা ভেক্টৰ এটি নিৰ্ণয় কৰা।

- (g) Find the equation of the directrix of

$$\text{the conic } \frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta.$$

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$  শাংকৰটোৰ নিয়মিকা নিৰ্ণয় কৰা।

(h) Find the asymptotes of the hyperbola  
 $xy + ax + by = 0$ .

$xy + ax + by = 0$  পৰাবৃত্তৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাদ্বয়  
নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer **any four** questions :  $10 \times 4 = 40$

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) (a) Show that  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  is numerically  
equal to the volume of the  
parallelepiped of which the three  
concurrent edges are  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . 5

দেখুওৱা যে  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  এ  $\vec{a}, \vec{b}$  আৰু  $\vec{c}$  ৰ  
দ্বাৰা কৌণিক বাহু তিনিটা নিৰ্দেশ কৰা চৌপলটোৰ  
আয়তন বুজায়।

(b) Find the equation of the line in  
3-space that passes through the  
points  $(2,3,4)$  and  $(0,-1,2)$ . 5

$(2,3,4)$  আৰু  $(0,-1,2)$  বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা  
ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) (a) Find the area of the triangle that is determined by the points  $P(5, -2, 1)$ ,  $Q(2, 4, 2)$  and  $R(3, 4, 5)$ . 5

$P(5, -2, 1)$ ,  $Q(2, 4, 2)$  আৰু  $R(3, 4, 5)$  বিন্দুৰে নিৰ্দেশ কৰা ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Find the vector and scalar projections of  $\vec{u} = 2i + 3j + 5k$  onto  $\vec{v} = 2i - 2j - k$ . 5

$\vec{v} = 2i - 2j - k$  ভেক্টৰৰ ওপৰত  $\vec{u} = 2i + 3j + 5k$  ৰ সদিশ আৰু অদিশ প্ৰক্ষেপ নিৰ্ণয় কৰা।

- (iii) (a) Find the equation of the bisectors of the angles between the pair of lines given by  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ .

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখা দুভালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Find the equation of the polar of  $P(x_1, y_1)$  with respect to the conic  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ . 5

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকৰ সাপেক্ষে  $P(x_1, y_1)$  ৰ প্ৰৱৰ্তী সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (iv) (a) Find  $\lambda$  such that the equation  $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0$  may represent a pair of straight lines. 5

$$12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0 \text{ এ}$$

দুভাল সৰলৰেখা বুজালে  $\lambda$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Find the polar equation of a circle. 5

এটা বৃত্তৰ প্ৰৱৰ্তী সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (v) (a) Find the condition that the line  $y = mx + c$  is a tangent to the parabola  $y^2 = 4ax$ . 5

$y = mx + c$  ৰেখাভাল  $y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তৰ স্পৰ্শক হোৱাৰ চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Prove that the sum of the reciprocals of two perpendicular focal chords of a conic is constant. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা শাংকৰৰ পৰস্পৰ লম্ব হোৱা নাভি জ্যাৰ প্ৰতিক্ৰমৰ সমষ্টি ধ্ৰুৱক।

- (vi) (a) Remove the  $xy$  term from the equation  $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2 = 0$  by rotating the axes. 5

অক্ষদ্বয়ক ঘূৰাই  $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2 = 0$  সমীকৰণৰ পৰা  $xy$  পদ অপনয়ন কৰা।

- (b) Find the equation of the pair of tangents from a given  $(x_1, y_1)$  point

to the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . 5

এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু  $(x_1, y_1)$  পৰা  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শকযোৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।



(vii) (a) If the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents a pair of parallel straight lines, show that

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f} \quad 5$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখাক বুজালে

দেখুওৱা যে  $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$

(b) If  $l$  and  $l'$  are the lengths of the two segments of a focal chord,

prove that  $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$ , where  $(a, 0)$

is the focus of the conic. 5

কোনো এভাল নাভি জ্যাৰ অংশ দুটি  $l$  আৰু  $l'$

হ'লে প্রমাণ কৰা যে  $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$  য'ত  $(a, 0)$

হ'ল শংকুৰ নাভি।

(viii) (a) Show that the lengths of the semi-axes of the conic

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = d \text{ are } \frac{d}{\sqrt{a+h}}$$

and  $\frac{d}{\sqrt{a-h}}$ . 5

$ax^2 + 2hxy + by^2 = d$  শাংকৰৰ অৰ্ধ

অক্ষদ্বয়ৰ দৈৰ্ঘ  $\frac{d}{\sqrt{a+h}}$  আৰু  $\frac{d}{\sqrt{a-h}}$

বুলি দেখুওৱা।

(b) Find the condition that the line  $lx + my = n$  touches the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad 5$$

$lx + my = n$  ৰেখাভালে  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তক স্পৰ্শ কৰাৰ চৰ্তটো উলিওৱা।

- (ix) (a) If  $e_1$  and  $e_2$  be the eccentricities of a hyperbola and its conjugate, show that  $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$ . 5

সংযুগ্ম পৰাবৃত্ত এযোৰৰ উৎকেন্দ্ৰতা  $e_1$  আৰু

$e_2$  হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে  $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$

- (b) If  $(at_1^2, 2at_1)$  and  $(at_2^2, 2at_2)$  are the two end points of a focal chord of the parabola  $y^2 = 4ax$ , prove that  $t_1t_2 = -1$ . 5

$y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তৰ নাভিলম্বীয় জ্যা এভালৰ দুই ঘূৰৰ বিন্দু দুটাৰ স্থানাংক  $(at_1^2, 2at_1)$  আৰু  $(at_2^2, 2at_2)$  হ'লে, প্ৰমাণ কৰা  $t_1t_2 = -1$ ।

- (x) (a) Prove that the eccentric angles of the extremities of two conjugate semi-diameters of an ellipse differ by a right angle. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা উপবৃত্তৰ দুভাল অনুবন্ধী অৰ্ধব্যাসৰ প্ৰান্তবিন্দুৰ উপকেন্দ্ৰিক কোণৰ পাৰ্থক্য এক সমকোণ।

(b) If the polars of  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$

w.r. to  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  are at right angles, then show that  $b^4 x_1 x_2 + a^4 y_1 y_2 = 0$ . 5

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ পৰাবৃত্ত সাপেক্ষে } (x_1, y_1)$$

আৰু  $(x_2, y_2)$  বিন্দুৰ প্ৰৱীণ ৰেখা দুভাল লম্বমান হ'লে দেখুওৱা যে

$$b^4 x_1 x_2 + a^4 y_1 y_2 = 0$$